Über Punktmengen im k-dimensionalen euklidischen Raum

Kanold, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 32, 1981, S.55-65

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über Punktmengen im k-dimensionalen euklidischen Raum

Von **Hans-Joachim Kanold,** Braunschweig

(Eingegangen am 10.7.1981)

In den „Elementen der Mathematik", Bd. **36** (1981), stellte P. Erdös die folgende Aufgabe: Es sei $M=\{P_1,\ldots,P_n\}$ eine Menge von n Punkten in einer Ebene. Bezeichnet $d(P_i,P_j)$ die euklidische Distanz von P_i,P_j, so gelte

(1) $d(P_i,P_j) \neq d(P_k,P_l) \Rightarrow |d(P_i,P_j) - d(P_k,P_l)| \geqq \varepsilon$ bei vorgegebenem $\varepsilon > o$. Dann läßt sich für den Durchmesser $\delta(M) := \max d(P_i,P_j)$; $1 \leqq i < j \leqq n$ die Abschätzung

(2) $\delta(M) > C_\varepsilon n^{2/3}$

gewinnen. Läßt sich (2) verschärfen?

Die Lösung dieser Aufgabe (siehe Elem. d. Math. ...) und zugleich eine Verschärfung von (2) lautet:

(3) Für $n \geqq 16$ gilt $\delta(M) > \frac{\varepsilon}{4} n^{3/4}$.

In dieser Note soll dieses Ergebnis leicht verbessert und das k-dimensionale Analogon behandelt werden. Der dreidimensionale Fall dürfte auch Physiker und Chemiker interessieren. Im folgenden machen wir die Annahmen

(4) $M=\{P_1,\ldots,P_n\}$ sei eine Menge von Punkten im $\mathbb{R}^k$ $(1 \leqq k \in \mathbb{N})$.

Es sei

(5) $$\left.\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\right\} d(P_i,P_j) = \left\{\begin{matrix} d_1 = d(M) = d \\ \delta(M) = \delta\end{matrix}\right. \quad (1 \leqq i < j \leqq n),$$

wobei $d(P_i,P_j)$ den euklidischen Abstand von P_i,P_j bezeichnet. Die $\binom{n}{2}$ formell verschiedenen $d(P_i,P_j)$ sollen **genau** die s verschiedenen Werte

(6) $o < d = d_1 < d_2 < \ldots < d_s = \delta$

annehmen. Nun beachten wir die Bedingung (1), die wir in etwas abgeschwächter Gestalt so formulieren:

(7) $$\min_{\sigma=1}^{s-1} (d_{\sigma+1} - d_\sigma) \geqq \varepsilon > o; \ \varepsilon \text{ fest vorgegeben.}$$

Aus (6) und (7) ergibt sich

(8) $\delta = d + (d_2 - d) + (d_3 - d_2) + \ldots + (d_s - d_{s-1}) \geqq d + (s-1)\varepsilon = \varepsilon(\frac{d}{\varepsilon} + s - 1).$

Wir diskutieren nun zuerst den einfachen eindimensionalen Fall ($k = 1$). Es gilt

Satz 1. *Aus $k = 1$, $n \geqq 3$ folgt $d \geqq \varepsilon$; $\frac{\delta}{\varepsilon} \geqq \frac{\delta}{d} \geqq n-1$.*

Beweis. Da alle P_i auf einer Geraden liegen, können wir P_i mit der reellen Zahl x_i identifizieren und $x_1 < \ldots < x_n$ annehmen. Es ist

(9) $$\delta = x_n - x_1 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i); \quad d = \min_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Hieraus folgt sofort

(10) $$\delta \geqq (n-1)d.$$

Für $n \geqq 3$ erhalten wir $d \geqq \varepsilon$, weil für $2 \leqq i \leqq n-1$ gilt

(11) $$d(P_{i-1}, P_{i+1}) - d(P_{i-1}, P_i) = d(P_i, P_{i+1}) \geqq \varepsilon;$$

Für $i = 1$ haben wir

(11) $$d(P_1, P_3) - d(P_2, P_3) = d(P_1, P_2) \geqq \varepsilon.$$

Im ebenen Fall ($k = 2$) gilt

Satz 2. *Sei $k = 2$, $n \geqq 4$. Dann folgt aus $d \leqq \varepsilon$ sogleich $\frac{\delta}{\varepsilon} > \frac{n}{2}$ und aus $d > \varepsilon$ die Abschätzung $\frac{\delta}{\varepsilon} > 0{,}366\, n^{3/4}$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

(12) $$d(P_1, P_2) = d.$$

Wir führen rechtwinklige euklidische Koordinaten so ein, daß

(13) $$P_1 = (-\tfrac{d}{2}, o); \quad P_2 = (\tfrac{d}{2}, o)$$

gilt. Sei $K^{(r)}$ die Schar der Kreise $K_\sigma^{(r)}$ um P_r mit dem Radius d_σ ($r = 1, 2$; $\sigma = 1, \ldots, s$). Jedes P_i ($i = 3, \ldots, n$) muß sowohl auf einem $K_\sigma^{(1)}$ als auch auf einem $K_\tau^{(2)}$ liegen ($1 \leqq \sigma, \tau \leqq s$). Die Gleichungen lauten

$$K_\sigma^{(1)} : (x_1 + \tfrac{d}{2})^2 + x_2^2 = d_\sigma^2;$$

(14) $$K_\tau^{(2)} : (x_1 - \tfrac{d}{2})^2 + x_2^2 = d_\tau^2.$$

Die gemeinsamen Punkte (x_1, x_2) von $K_\sigma^{(1)}$ und $K_\tau^{(2)}$ erfüllen

(15) $$x_1 = \frac{d_\sigma^2 - d_\tau^2}{2\,d}; \quad x_2 = \pm \sqrt{\frac{((d_\sigma + d_\tau)^2 - d^2) \cdot (d^2 - (d_\sigma - d_\tau)^2).}{4\,d^2}}$$

Für **reelle** Lösungen muß danach gelten

(16) $$|\sigma - \tau| \cdot \varepsilon \leqq |d_\sigma - d_\tau| \leqq d = \tfrac{d}{\varepsilon} \cdot \varepsilon; \quad |\sigma - \tau| \leqq \left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right].$$

Für $\sigma = \tau$ ergibt sich

(17) $x_1 = o;\ x_2 = \pm\sqrt{d_\sigma^2 - \frac{d^2}{4}}.$

Von diesen 2s verschiedenen Punkten auf der Geraden $x_1 = o$ seien m Elemente von $\{P_3, \ldots, P_n\}$. Nun machen wir eine Fallunterscheidung.

1. Fall: $P_3, \ldots, P_{m+2}$ liegen alle auf der gleichen Seite der Geraden $x_2 = o$, kurz g genannt. Dann erhalten wir

(18) $d = d_1 \leqq d(P_1,P_3) < d(P_1,P_4) < \ldots < d(P_1,P_{m+2}).$

Das sind m verschiedene Abstände. Daraus ergibt sich sofort

(19) $m \leqq s.$

Wäre $m = s$, dann wäre nach (18)

(20) $d = d(P_1,P_3) < d_2 = d(P_1,P_4) < \ldots < d_s = \delta = d(P_1,P_{s+2}).$

Aus der Dreiecksungleichung folgte

(21) $d + \varepsilon \leqq d_2 = d(P_1,P_4) < d(P_1,P_3) + d(P_3,P_4) = d + d(P_3,P_4);$
$d = d(P_3,P_4) < d_2;\ \varepsilon < d.$
Im 1. Fall liefert $d \leqq \varepsilon$ also $m \leqq s-1$.
2. Fall: P_j, P_{j+1} liegen auf verschiedenen Seiten von g.

Dann ist zunächst

(22) $d_1 \leqq d(P_1,P_{j+1}) < d(P_1,P_{j+2}) < \ldots < d(P_1,P_{m+2});$
$d_1 \leqq d(P_1,P_j) < d(P_1,P_{j-1}) < \ldots < d(P_1,P_3);$
$d(P_3,P_4) < d(P_3,P_5) < \ldots < d(P_3,P_j) < d(P_3,P_1);$
$d(P_3,P_j) < d(P_3,P_{j+1}) < \ldots < d(P_3,P_{m+2}).$

Nun ist, mit $0 = (o, o)$

(23) $d(P_3,P_1) = \sqrt{d^2(P_3,0) + \frac{d^2}{4}};\ d(P_3,P_{j+1}) = d(P_3,0) + d(0,P_{j+1}).$
Wegen $d(0,P_{j+1}) \geqq \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{4}} = \frac{d}{2}\sqrt{3}$ folgt

(24) $d(P_3,P_1) = \sqrt{d^2(P_3,0) + \frac{d^2}{4}} < d(P_3,P_{j+1}) = d(P_3,0) + d(0,P_{j+1}).$

Damit gilt nun

(25) $d(P_3,P_4) < \ldots < d(P_3,P_j) < d(P_3,P_1) < d(P_3,P_{j+1}) < \ldots < d(P_3,P_{m+2}).$

Das sind m verschiedene Abstände. Also gilt (19) auch im 2. Fall. In ähnlicher Weise wie im 1. Fall folgt auch jetzt aus $d \leqq \varepsilon$ stets $m \leqq s-1$. Für $d < \varepsilon$ liefert (16) sogleich $\sigma = \tau$; wir erhalten dann, mit (8)

(26) $n-2 \leqq m \leqq s-1 < \frac{\delta}{\varepsilon};\ \frac{\delta}{\varepsilon} > n(1 - \frac{2}{n}) \geqq \frac{n}{2}$ für $n \geqq 4$.

Hiermit ist für $d < \varepsilon$ Satz 2 bewiesen. Wenn $d = \varepsilon$ gilt, folgt aus (16) sogleich

(27) $d_\sigma - d_\tau = 0$ oder $|d_\sigma - d_\tau| = d = \varepsilon.$

Aus (15) sehen wir, daß alle $P_i = (x_1, x_2) \in M$ entweder auf $x_1 = o$ oder auf $x_2 = o$ liegen müssen. Für die Anzahl m der P_i auf $x_1 = o$ gilt $m \leqq s-1$; sei m' die Anzahl der P_i auf $x_2 = o$.

Wir erhalten

(28) $n = m + m' \leqq s-1+m'$.

Die m' Punkte auf $x_2 = o$ bestimmen $m'-1$ verschiedene Abstände; somit muß $m'-1 \leqq s$ sein. Wegen $d = \varepsilon$ ist $\delta \geqq s \cdot \varepsilon$; $n \leqq 2s \leqq 2\frac{\delta}{\varepsilon}$ oder

(29) $\frac{\delta}{\varepsilon} \geqq \frac{n}{2}$.

Ist nun $\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{n}{2}$, muß $m = s-1$; $m' = s+1$ gelten; $n = 2s \geqq 4$, $s \geqq 2$ ergeben $m' \geqq 3$. Mit Ausnahme von $d(P_1, P_2) = \varepsilon$ haben je zwei Punkte auf $x_2 = o$ einen Abstand von mindestens 2ε, was aus $m \geqq 1$ und der Dreiecksungleichung folgt. Das liefert

(30) $\delta \geqq \varepsilon + (s-1) \cdot 2\varepsilon = (2s-1)\varepsilon$; $\frac{\delta}{\varepsilon} \geqq n-1 > \frac{n}{2}$.

Somit ist der Satz 2 für $d \leqq \varepsilon$ bewiesen. Nun sei $\varepsilon < d$. Wir beachten, daß die Menge $\{P_3, \ldots, P_n\}$ eine Untermenge von

(31) $$\left\{x_1 = \pm \frac{|d_\sigma - d_\tau|}{d} \cdot \frac{d_\sigma + d_\tau}{2};\ x_2 = \pm \frac{1}{2d}\sqrt{((d_\sigma + d_\tau)^2 - d^2)\,(d^2 - (d_\sigma - d_\tau)^2)};\ |\sigma - \tau| \leqq \left[\frac{d}{\varepsilon}\right]\right\}$$

sein muß. Für $\sigma = \tau$ erhalten wir die Untermenge

(32) $$\left\{x_1 = o;\ x_2 = \pm\sqrt{d_\sigma^2 - \frac{d^2}{4}}\right\}.$$

Die Anzahl der Elemente von (32), die zu M gehören, sei m. Nach (19) folgt

(33) $m \leqq s$.

Wir sehen sogleich, daß

(34) $\delta \geqq (m-1)d$; $m \leqq 1 + \frac{\delta}{d} = 1 + \frac{\delta/\varepsilon}{d/\varepsilon}$

sein muß. Wir können nun in (31) annehmen:

$1 \leqq \tau < \sigma \leqq s$; $1 \leqq \sigma - \tau \leqq \left[\frac{d}{\varepsilon}\right]$.

Für die Anzahl der Paare (σ, τ) bekommen wir die Abschätzung

(35) $$\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right]\left(\left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right]-1\right) + \left(s - \left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right]\right)\left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right] = (s-1)\left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right] - \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right]\left(\left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right]-1\right).$$

Berücksichtigen wir in (31) die Vorzeichen, berücksichtigen wir außerdem, daß für $\sigma = s$ bei festem τ höchstens zwei Elemente in M liegen können, so erhalten wir

(36) $$n-2 \leqq 1 + \frac{\delta/\varepsilon}{d/\varepsilon} + 4(s-1)\left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right] - 2\left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right]\left(\left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right] - 1\right) - 2,$$

also mit (8)

(36') $n \leqq 1 + \frac{\delta/\varepsilon}{d/\varepsilon} - 2\left[\frac{d}{\varepsilon}\right]\left(\left[\frac{d}{\varepsilon}\right] - 1\right) + 4\left[\frac{d}{\varepsilon}\right]\left(\left[\frac{\delta}{\varepsilon}\right] - \left[\frac{d}{\varepsilon}\right]\right)$
$= 4\left[\frac{d}{\varepsilon}\right]\left[\frac{\delta}{\varepsilon}\right] + \frac{\delta/\varepsilon}{d/\varepsilon} + 1 - 6\left[\frac{d}{\varepsilon}\right]^2 + 2\left[\frac{\delta}{\varepsilon}\right].$

Aus den Annahmen

(37) $\frac{\delta}{\varepsilon} \leqq 0{,}366\ n^{3/4};\ \frac{d}{\varepsilon} \leqq \frac{2}{3}\ n^{1/4}$

ergibt sich

$n < 0{,}366 \cdot \frac{8}{3} n + 0{,}366\ n^{3/4};\ 0{,}024\ n^{1/4} < 0{,}366;\ n < (\frac{366}{34})^4$, d. h. für $n \geqq 15{,}25^4$ folgt aus (37) ein Widerspruch. Durch eine genauere Diskussion von (36') kann man zeigen, daß aus (37) für alle n ein Widerspruch folgt. Wir dürfen daher beim weiteren Beweise

(38) $\frac{d}{\varepsilon} > \frac{2}{3}\ n^{1/4}$

voraussetzen. Wir beachten jetzt, daß M ganz in ein Quadrat der Seitenlänge δ (einschließlich des Randes) eingeschlossen werden kann. Sei

(39) $m \in \mathbb{N};\ m^2 < n \leqq (m+1)^2.$

Dann existiert $a \in \{1,2\}$, so daß auch

(40) $m^a\ (m+1)^{2-a} < n \leqq m^{a-1}\ (m+1)^{3-a}$

erfüllt ist. Wir zerlegen das Quadrat der Seitenlänge δ in $m^a\ (m+1)^{2-a}$ kongruente Rechtecke mit den Seitenlängen

(41) $\frac{\delta}{m}$ (Anzahl a); $\frac{\delta}{m+1}$ (Anzahl 2−a).

Nach dem Dirichletschen Schubfachprinzip gibt es mindestens ein Rechteck, in welchem mindestens zwei Elemente aus M liegen. Daher gilt

(42) $$d \leqq \delta \sqrt{\frac{a}{m^2} + \frac{2-a}{(m+1)^2}};\ \frac{\delta}{d} \geqq \frac{m\,(m+1)}{\sqrt{a(m+1)^2 + (2-a)m^2}}\ .$$

Wir beweisen nun

Hilfssatz 1: $\frac{\delta}{d} > \sqrt{\frac{n}{3}}$.

Aus (38) und Hilfssatz 1 folgt $\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\delta}{d} \cdot \frac{d}{\varepsilon} > \frac{n^{1/2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}\ n^{1/4} = \frac{2}{\sqrt{27}}\ n^{3/4} > 0{,}366\ n^{3/4}$, somit der Beweis von Satz 2. Nach (40) und (42) müssen wir noch zeigen

(43) $$\frac{m\,(m+1)}{\sqrt{a(m+1)^2 + (2-a)m^2}} \geqq \frac{m^{\frac{a-1}{2}}\,(m+1)^{\frac{3-a}{2}}}{\sqrt{3}}\text{, also}$$

$$\frac{m\,(m+1)}{\sqrt{(m+1)^2 + m^2}} \geqq \frac{m+1}{\sqrt{3}}\ \text{bzw.}\ \frac{m\,(m+1)}{\sqrt{2\,(m+1)^2}} \geqq \sqrt{\frac{m\,(m+1)}{3}}\ .$$

Diese Ungleichungen gelten für $m \geqq 3$ bzw. $m \geqq 2$. Es bleiben nach (40) nur noch wenige Fälle übrig, die auf Grund geometrischer Überlegungen behandelt werden können. So ist z.B. $\frac{\delta}{d} \geqq \sqrt{2}$ für $n \geqq 4$, somit der Hilfssatz richtig für $n \leqq 5$.

Wir nehmen nun

(44) $k \geqq 3$

an und wollen die vorangegangenen Methoden sinnvoll auf die höheren Dimensionen übertragen. Zunächst läßt sich Hilfssatz 1 verallgemeinern zu

Hilfssatz 1*. *Es gilt* $\frac{\delta}{d} > \frac{1}{\sqrt{1{,}5\,k}} \cdot n^{1/k}$ *für* $k \geqq 2$.

Beweis. M läßt sich in einen k-dimensionalen Würfel (einschließlich des Randes) der Kantenlänge δ einschließen. Sei (vgl. (39))

(45) $m \in \mathbb{N};\ m^k < n \leqq (m+1)^k.$

Es existiert $a \in \{1,\ldots,k\}$, so daß

(46) $m^a (m+1)^{k-a} < n \leqq m^{a-1} (m+1)^{k+1-a}$

erfüllt ist. Wir zerlegen den k-dimensionalen Würfel in $m^a\ (m+1)^{k-a}$ kongruente k-dimensionale Quader mit den Kantenlängen

(47) $\frac{\delta}{m}$ (Anzahl a), $\frac{\delta}{m+1}$ (Anzal k-a).

Nach dem Schubfachprinzip liegen in mindestens einem Quader zwei Elemente von M. Daher gilt (vgl. (42))

(48) $$d \leqq \delta \sqrt{\frac{a}{m^2} + \frac{k-a}{(m+1)^2}}\,;\ \frac{\delta}{d} \geqq \frac{m\,(m+1)}{\sqrt{a(m+1)^2 + (k-a)m^2}}$$

Wann ist

(49) $$\frac{m\,(m+1)}{\sqrt{a(m+1)^2 + (k-a)m^2}} > \frac{1}{\sqrt{1{,}5\,k}}\, m^{\frac{a-1}{k}}\,(m+1)^{\frac{k+1-a}{k}}\ ?$$

Eine einfache Umformung führt zu

(49') $$1{,}5 \cdot \left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{2\,(a-1)}{k}} > 1 + \frac{2a}{km} + \frac{a}{km^2}\,.$$

Wegen $a \leqq k$ ist die rechte Seite nicht größer als $(1+\frac{1}{m})^2$, also ist (49') richtig für $m \geqq 5$. Nach (46) folgt aus $m \leqq 4$

(50) $n \leqq 4^{a-1} \cdot 5^{k+1-a} \leqq 5^k.$

Wegen $\frac{\delta}{d} \geqq 1 > \frac{1}{\sqrt{1{,}5\,k}} \cdot n^{1/k};\ (1{,}5\,k)^{\frac{k}{2}} > n$ können wir

(51) $5^k \geqq n \geqq (1{,}5\,k)^{\frac{k}{2}};\ 5^2 \geqq 1{,}5\,k;\ k \leqq \frac{25 \cdot 2}{3} < 17$

annehmen; somit also auch $n \leqq 5^{16}$. Diese Schranke läßt sich sogleich wesentlich verbessern, wenn man zeigt, daß (49') richtig ist für $a \geqq \frac{k}{3}+1$; $m \geqq 3$ oder für $a < \frac{k}{3}+1$; $m \geqq 3$; $k \geqq 3$. Also bleibt $m \leqq 2$ und

(52) $$(1{,}5\,k)^{k/2} \leqq n \leqq 3^k;\ k \leqq 6;\ n \leqq 3^6.$$

$m = 1$ führt zu dem Widerspruch $(1{,}5\,k)^{k/2} \leqq n \leqq 2^k$; $4{,}5 \leqq 1{,}5\ k \leqq 4$. Somit nimmt (49') die Gestalt

(49'') $$\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{2(a-1)}{k}} > 1 + \tfrac{5a}{4k}$$

an. Die wenigen noch verbleibenden Fälle können leicht durch Rechnung verifiziert werden. Damit ist der Hilfssatz 1* bewiesen. Nun zeigen wir die Richtigkeit von

Satz 3. *Sei* $k \geqq 4$; $n \geqq k+2$; $\frac{d}{\varepsilon} \leqq 1$ *oder* $\frac{d}{\varepsilon} \geqq n^{\frac{1}{k(k-1)}}$.

Dann gilt $\frac{\delta}{\varepsilon} > \frac{1}{\sqrt{1{,}5\,k}} \cdot n^{\frac{1}{k-1}}$.

Beweis. Nach Hilfssatz 1* folgt

(53) $$\frac{\delta}{\varepsilon} > \frac{1}{\sqrt{1{,}5\,k}}\, n^{\frac{1}{k}} \cdot \frac{d}{\varepsilon}.$$

Aus $\frac{d}{\varepsilon} \geqq n^{\frac{1}{k(k-1)}} = n^{\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}}$ ergibt sich sogleich die Behauptung. Sei jetzt

(54) $$d \leqq \varepsilon.$$

Wir legen die Punkte P_1 und P_2 durch

(55) $$P_1 = \left(-\tfrac{d}{2}, 0, 0 \ldots, 0\right);\ P_2 = \left(\tfrac{d}{2}, 0, \ldots, 0\right)$$

fest. Sei $K^{(r)}$ die Schar der k-dimensionalen Kugeln $K_\sigma^{(r)}$ um P_r mit dem Radius d_σ $(r = 1, 2;\ \sigma = 1, \ldots, s)$.

Jedes P_i $(i = 3, \ldots, n)$ muß sowohl auf einer $K_\sigma^{(1)}$ als auch auf einer $K_\tau^{(2)}$ liegen $(1 \leqq \sigma, \tau \leqq s)$. Die Gleichungen lauten

(56) $$K_\sigma^{(1)} : \left(x_1 + \tfrac{d}{2}\right)^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 = d_\sigma^2;$$
$$K_\tau^{(2)} : \left(x_1 - \tfrac{d}{2}\right)^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 = d_\tau^2.$$

Die gemeinsamen Punkte $(x_1, \ldots, x_k)$ von $K_\sigma^{(1)}$ und $K_\tau^{(2)}$ erfüllen

$$x_1 = \frac{d_\sigma - d_\tau}{d} \cdot \frac{d_\sigma + d_\tau}{2};$$

$$x_2^2 + \ldots + x_k^2 = (d^2 - (d_\sigma - d_\tau)^2)\left(\left(\tfrac{d_\sigma + d_\tau}{2d}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\right).$$

Hieraus ersehen wir, daß **reelle** Schnittpunkte nur auftreten können, wenn

(58) $$|\sigma - \tau| \cdot \varepsilon \leqq |d_\sigma - d_\tau| \leqq d = \tfrac{d}{\varepsilon} \cdot \varepsilon;\ |\sigma - \tau| \leqq \left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right]$$

erfüllt ist. Für $d<\varepsilon$ folgt also $\sigma=\tau$; für $d=\varepsilon$ folgt $\sigma=\tau-1$; $\sigma=\tau$; $\sigma=\tau+1$. Aus (57) ergibt sich für $\sigma=\tau$:

(59) $x_1=o;\ x_2^2+\ldots+x_k^2=d^2\left(\left(\frac{d_\sigma}{d}\right)^2-\frac{1}{4}\right).$

Alle diese Punkte liegen in einem (k-1)-dimensionalen euklidischen Raum, sogar auf der Oberfläche von s (k-1)-dimensionalen Kugeln um den O-Punkt mit den Radien $d\sqrt{\left(\frac{d_\sigma}{d}\right)^2-\frac{1}{4}}$ $(\sigma=1,\ldots,s)$. Ist der kleinste Abstand von zwei Elementen aus M in diesem (k-1)-dimensionalen Raum gleich d', ist die Anzahl dieser Elemente gleich m', so folgt nach Hilfssatz 1*

(60) $$\frac{\delta}{d'}>\frac{m'^{\frac{1}{k-1}}}{\sqrt{1{,}5\,(k-1)}}.$$

Aus $d<\varepsilon$ folgt $m'=n-2$; $\frac{\delta}{\varepsilon}=\frac{\delta}{d'}\cdot\frac{d'}{\varepsilon}>\frac{(n-2)^{\frac{1}{k-1}}}{\sqrt{1{,}5\,(k-1)}}\,\frac{d'}{\varepsilon}$.

Wegen $n\geqq k+2\geqq 5$ ist $\frac{(n-2)^{\frac{1}{k-1}}}{\sqrt{1{,}5\,(k-1)}}>\frac{n^{\frac{1}{k-1}}}{\sqrt{1{,}5\,k}}$, weil $\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{\frac{k-1}{2}}\geqq 1+\frac{1}{2}>1+\frac{1}{n-2}$ gilt. Der Satz 3 ist also richtig für $d<\varepsilon$; $d'\geqq\varepsilon$. Im Fall $d<\varepsilon$, $d'<\varepsilon$ erhalten wir

(61) $$\frac{\delta}{d''}>\frac{(n-4)^{\frac{1}{k-2}}}{\sqrt{1{,}5\,(k-2)}}.$$

Es liegen n-4 Elemente von M in einem (k-2)-dimensionalen Raum. Wegen $n\geqq k+2$ dürfen wir $\delta>d$, also auch $\delta\geqq d+\varepsilon$; $\frac{\delta}{\varepsilon}>1$ annehmen; d'' ist der kleinste Abstand von zwei Elementen aus M in dem (k-2)-dimensionalen Raum. Nun folgt aus $d''\geqq\varepsilon$ wieder

(62) $$\frac{\delta}{\varepsilon}>\frac{(n-4)^{\frac{1}{k-2}}}{\sqrt{1{,}5\,(k-2)}}>\frac{n^{\frac{1}{k-1}}}{\sqrt{1{,}5\,k}},$$

wenn $k\geqq 4$, $n\geqq 6$ gilt; aus $\frac{\delta}{\varepsilon}>1$ folgt, daß der Satz richtig ist für $n\leqq(1{,}5\,k)^{\frac{k-1}{2}}$. Wir können also

(63) $$(1{,}5\,k)^{\frac{k-1}{2}}<n$$

annehmen. Entweder existiert nun $d^{(h)}$ mit $h\in\mathbb{N}$, $h\leqq k-2$, so daß

(64) $$d^{(h)}\geqq\varepsilon;\ \frac{\delta}{\varepsilon}>\frac{(n-2h)^{\frac{1}{k-h}}}{\sqrt{1{,}5\,(k-h)}}>\frac{n^{\frac{1}{k-1}}}{\sqrt{1{,}5\,k}}$$

erfüllt ist, oder es existiert ein solches $d^{(h)}$ nicht. Im ersten Fall ist der Satz für $d<\varepsilon$ bewiesen. Im zweiten Fall liegen $n+4-2k$ Elemente von M in einer Ebene. Nach Satz 2 gilt für

$n+4-2k \geqq 4$ die Abschätzung

(65) $$\frac{\delta}{\varepsilon} > 0{,}366\,(n+4-2k)^{3/4} > \frac{n^{\frac{1}{k-1}}}{\sqrt{1{,}5\,k}},$$

weil

$$n+4-2k > (1{,}5\,k)^{\frac{k-1}{2}} + 4 - 2k \geqq 4,$$
$$0{,}366\,\sqrt{1{,}5\,k}\,(n+4-2k)^{3/4} > n^{\frac{1}{k-1}}$$

erfüllt ist. Somit ist für $d > \varepsilon$ alles bewiesen. Im Fall $d = \varepsilon$ folgt nach (57) und (58), daß die Menge $\{P_3, \ldots, P_n\}$ enthalten ist in der Menge

(66) $$\left\{x_1 = o;\ x_2^2 + \ldots + x_k^2 = d^2\left(\left(\tfrac{d_\sigma^2}{d^2}\right) - \tfrac{1}{4}\right)\right\} \cup \left\{x_1 = \pm\tfrac{2d_\sigma - d}{2},\ x_2 = \ldots = x_k = o\right\}.$$

Wir beachten, daß in der zweiten Menge höchstens $s+1$ Elemente von M liegen können und daß in der ersten Menge also $n-2-(s+1)$ Elemente von M liegen müssen. Nach Hilfssatz 1* folgt

(67) $$\frac{\delta}{\varepsilon} > \frac{1}{\sqrt{1{,}5\,(k-1)}} \cdot (n-3-s)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Wegen $\frac{\delta}{\varepsilon} \geqq s$ würde aus $\frac{\delta}{\varepsilon} \leqq \frac{1}{\sqrt{1{,}5\,k}}\, n^{\frac{1}{k-1}}$ folgen:

$$\frac{1}{\sqrt{1{,}5\,k}} \cdot n^{\frac{1}{k-1}} > \frac{1}{\sqrt{1{,}5\,(k-1)}}\left(n-3-\frac{n^{\frac{1}{k-1}}}{\sqrt{1{,}5\,k}}\right)^{\frac{1}{k-1}};$$ hieraus folgt aber wegen $n > 6\sqrt{6}$ ein Widerspruch. Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen. Im dreidimensionalen Fall lassen sich die Abschätzungen noch verschärfen. Es gilt

Satz 4. *Sei $k = 3$, $n \geqq 5$.*

Aus $d \leqq \varepsilon$ folgt $\frac{\delta}{\varepsilon} > \frac{1}{\sqrt{14}}\, n^{3/4}$;

aus $d > \varepsilon$ folgt $\frac{\delta}{\varepsilon} > \frac{1}{\sqrt{14}}\, n^{1/2}$.

Beweis. Die Menge $\{P_3, \ldots, P_n\}$ ist eine Untermenge von

$$\left\{x_1 = \tfrac{d_\sigma^2 - d_\tau^2}{2d};\ x_2^2 + x_3^2 = (d^2 - (d_\sigma - d_\tau)^2)\left(\left(\tfrac{d_\sigma + d_\tau}{2d}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\right);\ |d_\sigma - d_\tau| \leqq d\right\}.$$

Für $\sigma = \tau$ erhalten wir die Untermenge $\left\{x_1 = 0;\ x_2^2 + x_3^2 = d_\sigma^2 - \frac{d^2}{4}\right\}$. Alle diese Punkte liegen in der Ebene $x_1 = 0$. Für die Anzahl m der Elemente von M in $x_1 = 0$ gilt nach Satz 2

(68) $$\tfrac{\delta}{\varepsilon} > 0{,}366\, m^{3/4} \text{ (wenn } m \geqq 4 \text{ erfüllt ist).}$$

Aus $d < \varepsilon$ folgt nun $n-2 = m$; es führt somit $k = 3$, $n \geqq 6$, $d < \varepsilon$ zu

(69) $$\tfrac{\delta}{\varepsilon} > 0{,}366(n-2)^{3/4} = 0{,}366\left(1 - \tfrac{2}{n}\right) \cdot n^{3/4} \geqq 0{,}366 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{3/4} \cdot n^{3/4} > \tfrac{n^{3/4}}{\sqrt{14}}.$$

Für $n = 5$ haben wir $\frac{\delta}{\varepsilon} > 1 > \frac{5^{3/4}}{\sqrt{14}}$. Im Fall $d < \varepsilon$ ist Satz 4 bewiesen. Für $d = \varepsilon$ beachten wir, daß nach (66) die Menge $\{P_3, \ldots, P_n)$ Untermenge von

(70) $\{x_1 = o;\ x_2^2 + x_3^2 = d_\sigma^2 - \frac{d^2}{4}\} \cup \{x_1 = \pm(d_\sigma - \frac{d}{2});\ x_2 = x_3 = o\}$

sein muß. Wir erhalten mit (68)

(71) $n \leqq m + \frac{1}{2}\frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{3}{2} < (\frac{1}{0{,}366}\frac{\delta}{\varepsilon})^{4/3} + \frac{1}{2}\frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{3}{2}$

Wäre $\frac{\delta}{\varepsilon} \leqq \frac{1}{\sqrt{14}} n^{3/4}$, so wäre $n < (\frac{1}{0{,}366 \cdot \sqrt{14}})^{4/3} \cdot n + \frac{n^{3/4}}{2\sqrt{14}} + \frac{3}{2} < (\frac{270}{366})^{4/3} n + 0{,}135\, n^{3/4} + \frac{3}{2}$, was für $n \geqq 6$ zu einem Widerspruch führt. Also gilt der Satz für $d \leqq \varepsilon$. Zum Beweis für den letzten Fall $d > \varepsilon$ bemerken wir, daß aus $\varepsilon \leqq |d_\sigma - d_\tau| \leqq \frac{d}{\varepsilon} \cdot \varepsilon$ die Anzahl der Paare (σ, τ) nach oben abgeschätzt werden kann durch

(72) $$\sum_{\sigma=1}^{\left[\frac{d}{\varepsilon}\right]} (\left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right] + \sigma - 1) + \sum_{\sigma=\left[\frac{d}{\varepsilon}\right]+1}^{s-\left[\frac{d}{\varepsilon}\right]} 2\left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right] + \sum_{\sigma=s+1-\left[\frac{d}{\varepsilon}\right]}^{s} (s + \left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right] - \sigma) =$$

$$\left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right](2s - \left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right] - 1).$$

Wir erhalten wegen $\left[\frac{\delta}{\varepsilon}\right] \geqq s - 1 + \left[\frac{d}{\varepsilon}\right]$

(73) $n - 2 \leqq (\frac{1}{0{,}366}\frac{\delta}{\varepsilon})^{\frac{4}{3}} + \left[\frac{d}{\varepsilon}\right](2\left[\frac{\delta}{\varepsilon}\right] + 1 - 3\left[\frac{d}{\varepsilon}\right]) \cdot H,$

wobei H die Maximalzahl der P_i ist, für welche, bei festen σ, τ; $\sigma \neq \tau$ die Gleichung

(74) $x_2^2 + x_3^2 = R^2 = (d^2 - (d_\sigma - d_\tau)^2)\,((\frac{d_\sigma + d_\tau}{2d})^2 - \frac{1}{4}) < \delta^2$

gilt. Nun schätzen wir H nach oben ab. Durch eine einfache geometrische Überlegung ergibt sich

(75) $H < 2\pi\frac{\delta}{d}$.

Nach (72) und (75) wird

$$n - 2 \leqq (\tfrac{1}{0.366}\tfrac{\delta}{\varepsilon})^{4/3} + (2\left[\tfrac{\delta}{\varepsilon}\right] + 1 - 3\left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right])\left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right] \cdot 2\pi\tfrac{\delta}{d} \leqq$$

$$(\tfrac{1}{0{,}366}\tfrac{\delta}{\varepsilon})^{4/3} + 2\pi\,(2\tfrac{\delta}{\varepsilon} + 1 - 3\left[\tfrac{d}{\varepsilon}\right])\tfrac{\delta}{\varepsilon}.$$

Wäre $\frac{\delta}{\varepsilon} \leqq \frac{n^{1/2}}{\sqrt{14}}$, so müßte

(76) $n \leqq 2 + (\frac{1}{0{,}366 \cdot \sqrt{14}})^{4/3} \cdot n^{2/3} + 4\pi \cdot \frac{n}{14} - (3\frac{d}{\varepsilon} - 1) \cdot 2\pi \cdot \frac{n^{1/2}}{\sqrt{14}}$

sein. Für $n \geqq 216$ ergibt sich sogleich ein Widerspruch, für die kleineren n durch genauere Abschätzungen unter Berücksichtigung der eckigen Klammern und $\frac{\delta}{\varepsilon} > 1 \geqq \frac{n^{1/2}}{\sqrt{14}}$ für $n \leqq 14$. Hiermit ist Satz 4 vollständig bewiesen. Es ist noch eine offene Frage, ob in den Sätzen 2 bis 4 die Exponenten von n verbessert werden können. Die Beweise stützen sich weitgehend auf das einfache Dirichletsche Schubfachprinzip und die Dreiecksungleichung. Letztere gilt aber auch für andere Abstandsbegriffe als den euklidischen. In dieser Hinsicht scheinen noch keine Untersuchungen vorzuliegen.